18/10/2018

Άσκηση 10: • Αν $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ και $\omega = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

να αποδειχθεί: $1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{n-1} = 0$

Είναι $1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{n-1} = \dfrac{\omega^n - 1}{\omega - 1}$

$\omega - 1 \neq 0 \Rightarrow \omega \neq 1$

$$\frac{\omega^n - 1}{\omega - 1} = \frac{(1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{n-1})^n - 1}{\omega - 1} \overset{\text{De Moivre}}{=}$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{2\pi n}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi n}{n}\right) - 1}{\omega - 1} = \frac{1 - 1}{\omega - 1} = 0$$

$\omega^a \cdot \omega^b = \omega^{a+b}$ $\qquad a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} b + a^{n-3} b^2 + \dots + b^{n-1} \cdot a^0)$

• Αν $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ και $\omega = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$, να αποδειχθεί ότι: $1 \cdot \omega \cdot \omega^2 \cdot \dots \cdot \omega^{n-1} = (-1)^{n-1}$

→ φυσικός αριθμός ως άθροισμα κυβικών αριθμών

$$1 \cdot \omega \cdot \omega^2 \cdot \dots \cdot \omega^{n-1} = \omega^{\frac{n(n-1)}{2}} = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)^{\frac{n(n-1)}{2}} \overset{\text{De Moivre}}{=}$$

$$= \cos\left(\frac{2\pi(n(n-1))}{2n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi(n(n-1))}{2n}\right) =$$

$\cos(\pi(n-1)) + i\sin(\pi(n-1)) = (\cos(\pi) + i\sin(\pi))^{n-1} = (-1)^{n-1}$

$k\pi$ π

Άσκηση 11: Να λυθεί η εξίσωση $z^6=1$

Παρατηρώ ότι αν z λύση, τότε $z \neq 0$

Έστω $z=\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

$$(\rho(\cos\theta + i\sin\theta))^6 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$$

De Moivre: $\rho^6(\cos(6\theta) + i\sin(6\theta)) = 1(\cos 0 + i\sin 0)$

$\rho^6 = 1$ και $6\theta - 0 = 2k\pi$

$\rho \geq 0$, $\rho = 1$ $\theta = \frac{2k\pi}{6} \Rightarrow \theta = \frac{k\pi}{3}$

$k=0$: $z_0 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$

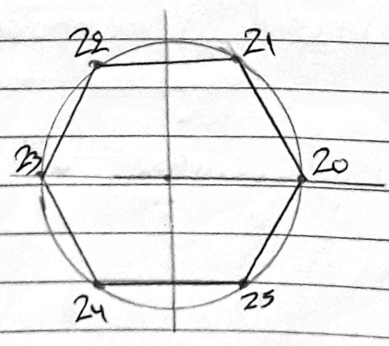
$k=1$: $z_1 = 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$k=2$: $z_2 = 1\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

$k=3$: $z_3 = 1\left(\cos(\pi) + i\sin(\pi)\right)$

$k=4$: $z_4 = 1\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$

$k=5$: $z_5 = 1\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)$

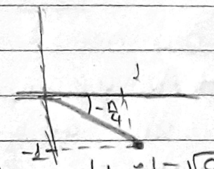


κανονικό εξάγωνο

Άσκηση 12: $z^3 = 1-i$

Αν z λύση της $z^3 = 1-i$, τότε $z \neq 0$

$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ για κάποιο $\rho > 0$ και θ



$$z^3 = \left(\rho(\cos\theta + i\sin\theta)\right)^3 = \rho^3(\cos(3\theta) + i\sin(3\theta))$$

$|1-i| = \sqrt{2}$

$$1-i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$\rho^3 = \sqrt{2}$ και $3\theta + \frac{\pi}{4} = 2k\pi$

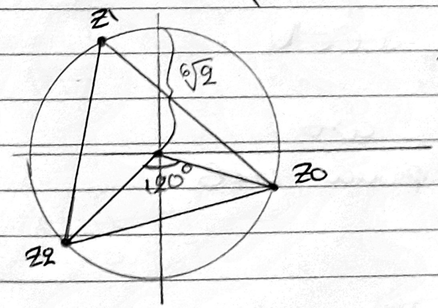
$\rho^3 = 2^{1/2}$

$\rho = \sqrt[6]{2}$ $\qquad 3\theta = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{12}$

$k=0$: $z_0 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$

$k=1$: $z_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{12}\right)\right)$

$k=2$: $z_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{12}\right)\right)$



Ισόπλευρο Τρίγωνο.

Θεμελιώδες Θεώρημα Άλγεβρας (Gauss)

Έστω $F(x) \in \mathbb{C}[x]$

$= a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ με $a_n \neq 0$, $n \geq 1$

Τότε το $F(x)$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\mathbb{C}$. Έστω ρ_1 η ρίζα του $F(x)$, τότε $F(x) = (x-\rho_1)g(x) = (x-\rho_1)(x-\rho_2)h(x) =$

↳ βαθμού n ↳ βαθμού $n-1$

$= (x-\rho_1)(x-\rho_2)\dots(x-\rho_n)a_n$ (οι ρίζες δεν είναι απαραίτητα διαφορετικές μεταξύ τους)

$\mathbb{Z}$: Το σύνολο των ακεραίων αριθμών

Ιδιότητες:

→ Αν $a, b, \gamma \in \mathbb{Z}$ τότε $(a+b)+\gamma = a+(b+\gamma)$ και $(ab)\gamma = a(b\gamma)$ — προσεταιριστική ιδιότητα

→ Αν $a, b \in \mathbb{Z}$ τότε $a+b = b+a$ και $ab = ba$ — (αντιμ) - μεταθετική ιδιότητα

→ Για κάθε $a \in \mathbb{Z}$ ισχύει $a+0=a$ και $1 \cdot a = a$ — ουδέτερο στοιχείο

→ Για κάθε $a \in \mathbb{Z}$ ισχύει $a+(-a)=0$ — αντίθετο στοιχείο, ύπαρξη αντιθέτου

Στους ακέραιους δεν υπάρχει αντίστροφο.

Στους φυσικούς αριθμούς $\mathbb{N}$ δεν μπορώ να κάνω αφαίρεση

→ Για κάθε a, b, γ έχουμε $a(b+\gamma) = ab + a\gamma$ και $(a+b)\gamma = a\gamma + b\gamma$ — επιμεριστική ιδιότητα

Διάταξη

Ορισμός: $a > b$ αν και μόνο αν $a - b \in \mathbb{N}$

$$a, b \in \mathbb{Z} : \begin{cases} 0 , & a=b \\ \text{φυσικός αριθμός} , & a>b \\ \text{αντίθετος φυσικού αριθμού} , & a<b \end{cases}$$

Ιδιότητες:

(i) Αν $a > b$ τότε $a+\gamma > b+\gamma$

(ii) Αν $a > b$ και $\gamma \in \mathbb{N}$ τότε $a\gamma > b\gamma$

Αρχή της καλής διάταξης στους φυσικούς αριθμούς

Κάθε μη-κενό υποσύνολο S των φυσικών αριθμών έχει ελάχιστο στοιχείο, δηλαδή υπάρχει $a \in S$ τέτοιο ώστε $a \leq b$ για κάθε $b \in S$

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$

Η αρχή δεν ισχύει για τους ακεραίους

Θεώρημα Μαθηματικής Επαγωγής

Έστω S ένα υποσύνολο των φυσικών αριθμών ($S \subseteq \mathbb{N}$)
τέτοιο ώστε να ισχύουν:

(i) $1 \in S$ και

(ii) Αν $n \in S$ τότε $n+1 \in S$

Τότε το $S = \mathbb{N}$

Απόδειξη: Θεωρώ το σύνολο $\mathbb{N}-S$. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις: $\mathbb{N}-S \neq \emptyset$ και $\mathbb{N}-S = \emptyset$

Έστω ότι $\mathbb{N}-S \neq \emptyset$. Η αρχή της καλής διάταξης μου λέει ότι το $\mathbb{N}-S$ έχει ελάχιστο στοιχείο, έστω το l. Το $l \in \mathbb{N}-S$ $\Rightarrow l \notin S$

$1 \in S$. Άρα $l \neq 1 \Rightarrow l > 1 \Rightarrow l-1$ φυσικός αριθμός

$l-1 \in \mathbb{N}-S$. Όμως $l-1 < l$ άτοπο! Άρα $l-1 \notin \mathbb{N}-S$

$\overset{(ii)}{\Rightarrow} l-1+1 \in S \Rightarrow l \in S$ Άτοπο!

$$\text{Συνεπώς } \left.\begin{matrix} \mathbb{N}-S = \emptyset \\ S \subseteq \mathbb{N} \end{matrix}\right\} \Rightarrow S = \mathbb{N}$$

Μέθοδος της Μαθηματικής Επαγωγής

Έστω $P(n)$ μια πρόταση που εξαρτάται απο το φυσικό αριθμό n. Αν ισχύει: (i) $P(1)$ αληθής

(ii) Αν υποθέσουμε ότι $P(n)$ αληθής $\Rightarrow P(n+1)$ αληθής

Τότε η πρόταση $P(n)$ ισχύει $\forall n \in \mathbb{N}$

$S = \{ n \,/\, P(n) \text{ αληθής} \}$

$\overset{(i)}{\ }$ $S = \mathbb{N}$

Πρόταση-Θεώρημα: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει:

Άσκηση: $1+2+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$: $P(n)$

(i) Θα δείξω $P(1)$: αληθής

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1 \rightarrow P(1) \text{ αληθής.}$$

ii) Υποθέτω ότι $P(n)$: αληθής άρα:

$$1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1+2+\dots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$: $P(n+1)$ αληθής

Άρα $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ ισχύει $\forall n \in \mathbb{N}$.